

# Baccalauréat Général - Épreuve d'Enseignement de Spécialité - Session 2024

Mathématiques - Jour 2

## **Instructions**

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.

L'usage de la calculatrice sans mémoire « type collègue » est autorisé.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.

Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1/6 à 6/6.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront valorisées.

## Exercice 1 (5 points)

Les données publiées le 1er mars 2023 par le ministère de la transition écologique sur les immatriculations de véhicules particuliers en France en 2022 contiennent les informations suivantes :

- 22,86 % des véhicules étaient des véhicules neufs ;
- 8,08 % des véhicules neufs étaient des hybrides rechargeables ;
- 1,27 % des véhicules d'occasion (c'est-à-dire qui ne sont pas neufs) étaient des hybrides rechargeables.

Dans tout l'exercice, les probabilités seront arrondies au dix-millième.

### Partie A

Dans cette partie, on considère un véhicule particulier immatriculé en France en 2022.

On note :

- $N$  l'événement « le véhicule est neuf » ;
- $R$  l'événement « le véhicule est hybride rechargeable » ;
- $\bar{N}$  et  $\bar{R}$  les événements contraires des événements contraires de  $N$  et  $R$ .

1. Représenter la situation par un arbre pondéré.
2. Calculer la probabilité que ce véhicule soit neuf et hybride rechargeable.
3. Démontrer que la valeur arrondie au dix-millième de la probabilité que ce véhicule soit hybride rechargeable est 0,0283.
4. Calculer la probabilité que ce véhicule soit neuf sachant qu'il est hybride rechargeable.

### Partie B

Dans cette partie, on choisit 500 véhicules particuliers hybrides rechargeables immatriculés en France en 2022. Dans la suite, on admettra que la probabilité qu'un tel véhicule soit neuf est égale à 0,65.

On assimile le choix de ces 500 véhicules à un tirage aléatoire avec remise.

On appelle  $X$  la variable aléatoire représentant le nombre de véhicules neufs parmi les 500 véhicules choisis.

1. On admet que la variable aléatoire  $X$  suit une loi binomiale. Préciser la valeur de ses paramètres.
2. Déterminer la probabilité qu'exactement 325 de ces véhicules soient neufs.
3. Déterminer la probabilité  $p(X \geq 325)$  puis interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

### Partie C

On choisit désormais  $n$  véhicules particuliers hybrides rechargeables immatriculés en France en 2022, où  $n$  désigne un entier naturel strictement positif.

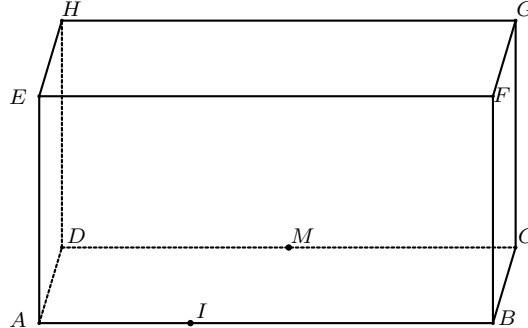
On rappelle que la probabilité qu'un tel véhicule soit neuf est égale à 0,65.

On assimile le choix de ces  $n$  véhicules à un tirage aléatoire avec remise.

1. Donner l'expression en fonction de  $n$  de la probabilité  $p_n$  que tous ces véhicules soient d'occasion.
2. On note  $q_n$  la probabilité qu'au moins un de ces véhicules soit neuf. En résolvant une inéquation, déterminer la plus petite valeur de  $n$  telle que  $q_n \geq 0,9999$ .

## Exercice 2 (5 points)

On considère le pavé droit  $ABCDEFGH$  tel que  $AB = 3$  et  $AD = AE = 1$  représenté ci-dessous.



On considère le point  $I$  du segment  $[AB]$  tel que  $\vec{AB} = 3\vec{AI}$  et on appelle  $M$  le milieu du segment  $[CD]$ .

On se place dans le repère orthonormé  $(A; \vec{AI}, \vec{AD}, \vec{AE})$ .

1. Sans justifier, donner les coordonnées des points  $F$ ,  $H$  et  $M$ .
2. (a) Montrer que le vecteur  $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$  est un vecteur normal au plan  $(HMF)$ .  
 (b) En déduire qu'une équation cartésienne du plan  $(HMF)$  est :  $2x + 6y + 3z - 9 = 0$ .  
 (c) Le plan  $\mathcal{P}$  dont une équation cartésienne est  $5x + 15y - 3z + 7 = 0$  est-il parallèle au plan  $(HMF)$ ? Justifier la réponse.
3. Déterminer une représentation paramétrique de la droite  $(DG)$ .
4. On appelle  $N$  le point d'intersection de la droite  $(DG)$  avec le plan  $(HMF)$ . Déterminer les coordonnées du point  $N$ .
5. Le point  $R$  de coordonnées  $\begin{pmatrix} 3 \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$  est-il le projeté orthogonal du point  $G$  sur le plan  $(HMF)$ ? Justifier la réponse.

### Exercice 3 (6 points)

On considère la fonction  $g$  définie sur l'intervalle  $[0; 1]$  par  $g(x) = 2x - x^2$ .

1. Montrer que la fonction  $g$  est strictement croissante sur l'intervalle  $[0; 1]$  et préciser les valeurs de  $g(0)$  et de  $g(1)$ .

On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = \frac{1}{2}$  et  $u_{n+1} = g(u_n)$  pour tout entier naturel  $n$ .

2. Calculer  $u_1$  et  $u_2$ .
3. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$ , on a :  $0 < u_n < u_{n+1} < 1$ .
4. En déduire que la suite  $(u_n)$  est convergente.
5. Déterminer la limite  $\ell$  de la suite  $(u_n)$ .

On considère la suite  $(v_n)$  définie pour tout entier naturel  $n$  par  $v_n = \ln(1 - u_n)$ .

6. Démontrer que la suite  $(v_n)$  est une suite géométrique de raison 2 et préciser son premier terme.
7. En déduire une expression de  $v_n$  en fonction de  $n$ .
8. En déduire une expression de  $u_n$  en fonction de  $n$  et retrouver la limite déterminée à la question 5.
9. Recopier et compléter le script Python ci-dessous afin que celui-ci renvoie le rang  $n$  à partir duquel la suite dépasse 0,95.

```
def seuil():
    n=0
    u=0.5
    while u<0.95:
        n=...
        u=...
    return n
```

## Exercice 4 (4 points)

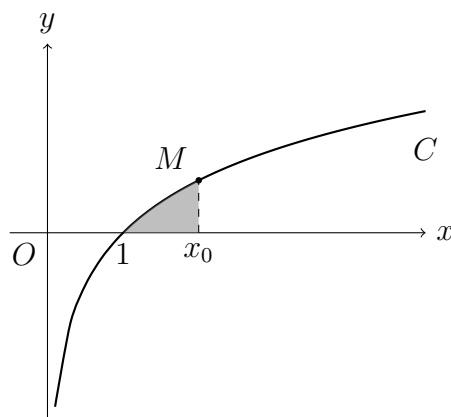
Soit  $a$  un réel strictement positif.

On considère la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  par  $f(x) = a \ln(x)$ .

On note  $\mathcal{C}$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

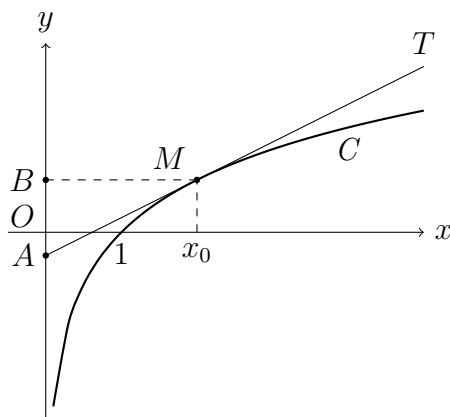
Soit  $x_0$  un réel strictement supérieur à 1.

1. Déterminer l'abscisse du point d'intersection de la courbe  $\mathcal{C}$  et de l'axe des abscisses.
2. Vérifier que la fonction  $F$  définie par  $F(x) = a(x \ln(x) - x)$  est une primitive de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $]0; +\infty[$ .
3. En déduire l'aire du domaine grisé en fonction de  $a$  et de  $x_0$ .



On note  $T$  la tangente à la courbe  $\mathcal{C}$  au point  $M$  d'abscisse  $x_0$ .

On appelle  $A$  le point d'intersection de la tangente  $T$  avec l'axe des ordonnées et  $B$  le projeté orthogonal de  $M$  sur l'axe des ordonnées.



4. Démontrer que la longueur  $AB$  est égale à une constante (c'est-à-dire à un nombre qui ne dépend pas de  $x_0$ ) que l'on déterminera. Le candidat prendra soin d'expliciter sa démarche.